

## Úvod

Milý řešiteli,

vítáme Tě u 1. série úloh 7. ročníku korespondenčního semináře MoRoUS. Tentokrát se podíváme na útrapy profesorovy neteře Alenky, která si stýská, jak je v současné době těžké najít partnera.

# 1. série 2020/2021

Termín odeslání 1. série: **15. 3. 2021**

## Kam posílat řešení?

Až budeš mít řešení hotové, pošli nám je včetně všech nákresů, programků a prostě všeho co by nám usnadnilo opravování Tvé úlohy. Stačí, když pošleš řešení jen některých úloh nebo jejich částí i za ně Ti přičteme body ;)

Řešení posílej e-mailem na adresu [seminar@morous.fel.cvut.cz](mailto:seminar@morous.fel.cvut.cz).

## Úloha č. 1: Láska na konci světa (20 bodů)

Ve městečku Láska na konci světa, bydlí  $N$  obyvatel. Každého z nich si můžeme představit jako uzal grafu. Interakce mezi těmito lidmi jsou modelované jako hrany tohoto grafu. Každá hrana grafu má nějakou váhu. Ta značí, jak dlouhou interakci lze mezi těmito lidmi typicky očekávat za jeden den (např. 30 minut). Představte si, že Alenka hledá lásku. Alenka se snaží najít toho pravého ve své síti kontaktů. Povídá si, potkává se a doufá, že se do ní co nejvíce lidí zamiluje a z nich si bude moci vybrat. Každý člověk potřebuje strávit s Alenkou nějakou dobu nebo si o ní alespoň povídat, než se do ní zamiluje (tento čas je uveden v uzlu grafu). Poté, co propadne lásce k ní, si o Alence povídá se svými kamarády, a zamilovanost do Alenky se od něj tudíž šíří na všechny jeho kamarády, se kterými tráví čas. Příklad takové sítě je možné vidět na obr. 1. Zde jsme nakreslili jen Alenku a muže z vesnice (jiné ženy jsme pro jednoduchost nezakreslili). Muže si označíme čísla  $M_1, \dots, M_M$  počínaje levým horním rohem a pokračujeme tak postupně po řádcích. Stejný tvar sítě budeme používat v celé úloze.

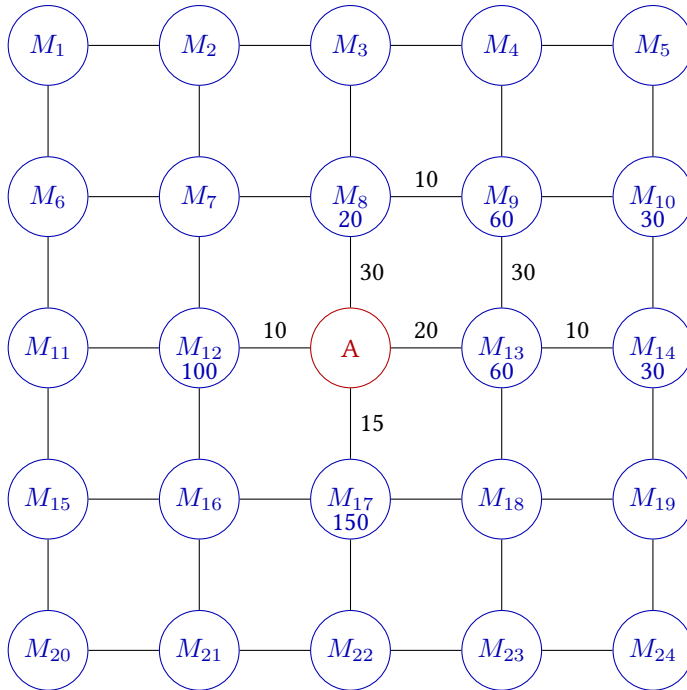
V tomto případě je vidět, že Alenka se vídá se 4 muži (tráví s nimi 10, 15, 20 a 30 minut denně). Každý z nich se stýká s několika dalšími muži a tak dál. Muž  $M_{13}$  se do Alenky zamiluje po 60 minutách (tedy po 3 dnech), muž  $M_8$  se do ní zamiluje po 30 minutách (tedy po 1 dni). Od této chvíle se může jejich zamilovanost šířit na jejich kamarády. Muž  $M_9$  slyší o Alence od muže  $M_8$  od 2. dne a od muže  $M_{13}$  od 4. dne. Za kolik dní se do ní tedy zamiluje i on? Ano, už 5. den do ní bude zamilovaný :-)

### Úkol 1.1

Představte si stejný graf jako na obrázku 1, který popisuje velmi dobře vztahy v naší vesničce. Představte si, že v našem městečku žije 24 mužů. Naši vesnici si můžete představit přesně jako na obrázku 1, jen s tím rozdílem, že všichni lidé spolu tráví každý den vždy 20 minut a každý muž potřebuje přesně 60 minut na to, aby se do Alenky zamiloval. Kolik dní bude trvat, než se do Alenky zamiluje celá vesnice a ona si bude moci konečně vybrat toho pravého? Jak dlouho by to trvalo, kdyby bylo ve vesnici 80 mužů? A co kdyby bylo ve vesnici  $n^2 - 1$  mužů?

### Úkol 1.2

Představte si, že městečko zachvátila velká epidemie. Díky tomu se omezily kontakty mezi lidmi (v našem případě si můžeme představit, že každá druhá řada vodorovných kontaktů zmizela – viz obr. 2). Alenka se vídá už jen se 2 muži a také kontakty mezi muži prořídly. Navíc doba, kterou spolu průměrně stráví dva lidé ve městečku se zkrátila na polovinu (tedy na 10 minut). Kolik nejvíce známých může být nyní mezi Alenkou a některým mužem z městečka?

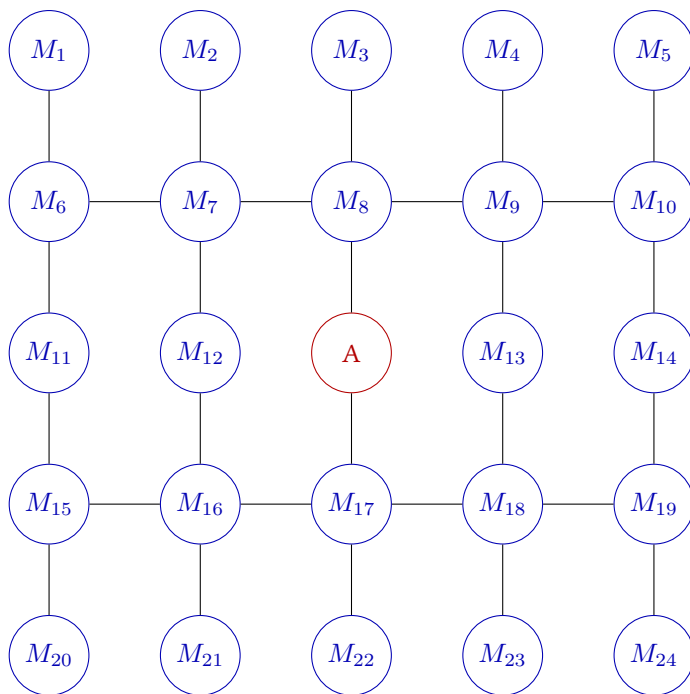


Obrázek 1

Jak dlouho by trvalo, než se do Alenky zamiluje celé městečko pro případ, že je v něm 24, 80, nebo  $n^2 - 1$  mužů (např. pro  $n = 5$  máme 24 mužů)?

### Úkol 1.3

Ale ani to nebylo dost. Bylo potřeba omezit kontakty ještě více. Alenka už byla úplně nešťastná. Nyní se ještě omezily každé druhé vertikální kontakty – viz obr. 3. Jak by to dopadlo nyní? Je vidět, že někteří muži zůstali raději zavření doma a už ani nevychází a Alenka nemá šanci se s nimi vůbec seznámit. Kolik mužů se do ní maximálně může zamilovat? A za jak dlouho na to bude muset čekat? Jaká budou tato čísla pro 80 a  $n^2 - 1$  mužů?



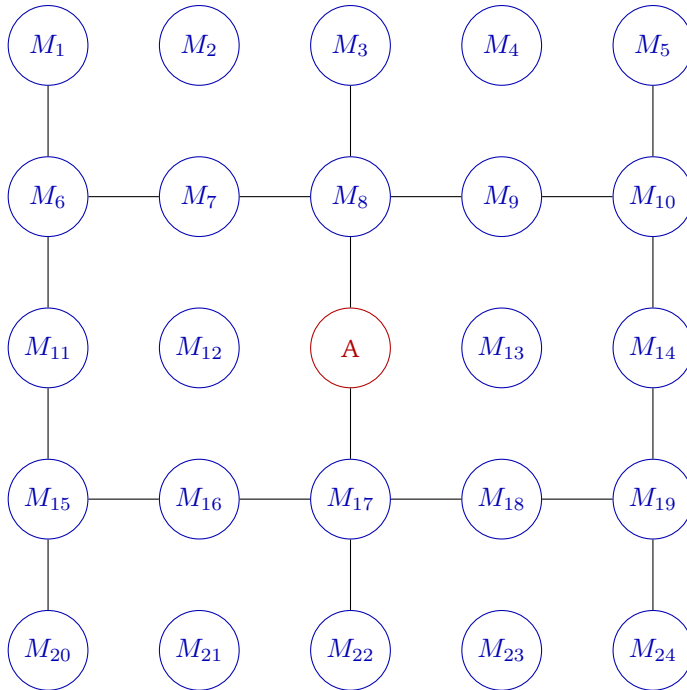
Obrázek 2

### Úkol 1.4

Co kdyby ale nechtěla čekat déle než 14 dní? Z kolika mužů by měla na výběr?

### Úkol 1.5

Nyní se vrátíme zpátky k naší normálně propojené vesnici (obr. 1). Navíc budeme uvažovat, že každý muž se může odmílovat nebo zemřít neopětovanou láskou. Označíme si z levého horního rohu muže po řádcích čísly  $M_1, \dots, M_M$ . Pokud by se každý druhý muž (ten označený sudým číslem) po deseti dnech odmíloval a každý druhý muž (s lichým číslem) po 10 dnech zamilovanosti umřel, dokážete ukázat, jak se bude vyvíjet počet zamilovaných do Alenky v ča-



Obrázek 3

se? A jak je to s těmi, kteří se odmilovali? Mohou se znovu zamilovat? Ano, ale jen někteří. Doba na zamilování se u těch, kteří se odmilovali, ztrojnásobí. Navíc se každý, jehož číslo je dělitelné beze zbytku 4, stane vůči Alence imunní a tudíž se do ní už nemůže zamilovat. Dokážete zobrazit vývoj počtu mužů zamilovaných do Alenky? Jak se bude vyvíjet počet těch, kteří zemřeli neopětovanou touhou po Alence? A jak bude vypadat počet těch, kteří jsou vůči lásce k Alence imunní? Jak to bude vypadat pro naši malou vesničku s 24 muži, jak pro 80 mužů a jak pro obecně  $n^2 - 1$  mužů?

*Pozn.: Pokud by vás zajímalo, co se stane s mužem, který se zamiloval, odmiloval a zase zamiloval, pak vězte, že poté, co se podruhé odmiluje se již stane vůči lásce k Alence imunní nadsmrti.*



## Úkol 1.6

Dokázali byste podobný vývoj úmrtí, zamilovaných a imunních vůči lásce zobrazit také pro vesnici s omezenými kontakty jako na obr. 2 a 3?